Отзыв официального оппонента Седаева А.А.
о диссертационной работе Романовой Елены Юрьевны «Метод подобных операторов в исследовании оператора Дирака и дифференциального оператора с инволюцией»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Романовой Е.Ю. посвящена применению неаналитического метода подобных операторов к исследованию спектральных свойств систем линейных дифференциальных уравнений, дополненных различными краевыми условиями и возмущенных применением к искомой векторнозначной функции аргумента x переменного эндоморфизма $Q(x)$, называемого потенциалом. В качестве объекта непосредственного изучения выбраны краевые задачи для дифференциального оператора Дирака и дифференциального оператора с инволюцией. Эти операторы возникают в ряде задач математической физики и были исследованы с других точек зрения многими авторами, что подтверждает безусловную актуальность рассматриваемой работы.

Несмотря на кажущуюся простоту определения самих операторов (особенно в случае отсутствия возмущающего слагаемого) краевые задачи, рассматриваемые в диссертации Е.Ю. Романовой, оказываются весьма сложными для исследования известными методам теории возмущений. Отчасти это связано с тем, что в формулируемых краевых задачах на заданном отрезке ищется, вообще говоря, обобщенное решение, принадлежащее пространству Соболева W_p^1, $1 \le p \le \infty$.

Поэтому в качестве инструментов исследования автор выбирает метод гармонического анализа операторов и метод подобных операторов, развитые в работах А.Г. Баскакова и его учеников. Действительно, если возмущенный оператор подобен невозмущенному (вместе с соответствующими краевыми условиями), то структура спектрального представления возмущенного оператора становится вполне определенной.

Однако и здесь автору приходится преодолевать весьма сложные технические и не только технические трудности, демонстрируя отличное владение средствами и методами функционального и гармонического

анализа. Достаточно сказать, что только определение основного понятия метода подобных операторов – допустимой тройки (U, J, Γ) оператора A (Определение 1.23 на стр. 36) занимает всю страницу и требует выполнения 5 условий. При их выполнении справедлива основная теорема метода подобных операторов – Теорема 1.6, сформулированная на стр. 37.
где указано условие на возмущающий оператор B, при котором возмущенный оператор будет подобен невозмущенному. Но и тут, для того, чтобы возмущающий оператор B (после исправления) принадлежал пространству U допустимых для A возмущений, требуется выполнение Предположения 1.1, также состоящего из 5 пунктов.

Диссертация Е.Ю. Романовой состоит из введения, трех глав и списка литературы. Во введении обосновывается актуальность поставленной задачи и дается подробный обзор диссертации.

В первой главе приводятся используемые в диссертации известные понятия и результаты из функционального анализа, спектральной теории операторов, теории полугрупп, а также определения и основные утверждения метода подобных операторов.

Во второй главе рассматривается оператор Дирака, действующий в одном из лебеговых пространств со значениями в $\mathbb{C}^2$ или в банаховом пространстве непрерывных и ограниченных функций и дополненный периодическими, антипериодическими краевыми условиями или условиями Дирихле.

Во втором параграфе строится схема, в которой метод подобия применяется к абстрактным операторам, близким по своим спектральным свойствам к исследуемому оператору Дирака. Установлено, что каждый рассматриваемый оператор подобен оператору, являющемуся прямой суммой операторов с конечным рангом.

В третьем параграфе исследуется асимптотика спектра и доказывается теорема о равносходимости спектральных разложений возмущенного и невозмущенного операторов.

Хотя структура и результаты главы 2 аналогичны работе А.Г. Баскакова, А.В. Дербушева, А.О. Щербакова (Известия РАН. Сер. матем. 2011, т.75, №3, с. 3–28.), где рассматривался случай оператора Дирака в гильбертовом пространства L_2, перенос результатов этой статьи на случай

лебеговых пространств не является легким, а автору приходится преодолеть серьезные математические трудности.

В третьей главе рассматривается дифференциальный оператор с инволюцией $L: D(L) \subset L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m) \to L_2([0,\omega],\mathbb{C}^m)$, задаваемый на отрезке $[0, \omega]$ дифференциальным выражением $L(y)$: $y'(x)+Q(x)y(\omega-x)$ и периодическими краевыми условиями.

Во втором параграфе этой главы изложена абстрактная схема применения метода подобных операторов для операторов, близких к дифференциальному оператору с инволюцией. Установлено, что дифференциальный оператор с инволюцией подобен оператору, являющемуся прямой суммой операторов с конечным рангом.

В третьем и четвертом параграфах метод подобия применяется к исследованию спектра оператора с инволюцией. В данном случае построения снова ведутся с помощью рядов Фурье, но уже для операторов Гильберта-Шмидта в гильбертовом пространстве периодических функций, суммируемых с квадратом на промежутке длиной в период. Основными являются теоремы 3.3, 3.4, 3.5, 3.8.

При этом следует отметить, что асимптотика спектра возмущенного дифференциального оператора дается в терминах самого возмущения с помощью функционалов $\alpha(\Omega,B)$, эндоморфизмов Φ_k, и коэффициентов Q_n, $k,n \in \mathbb{Z}$. Установлено, что при выполнении условий подобия возмущенного и невозмущенного операторов имеет место равносходимость их спектральных представлений. Кроме того, установлено асимптотическое представление группы операторов T(t), порожденной изучаемым оператором при $m=1$ (то есть в скалярном случае).

Отметим некоторые опечатки и замечания.

1. В автореферате не назван идеал σ_2 операторов Гильберта-Шмидта.

2. В автореферате Теорема 3.5 применяются но нигде не определяются величины $Q_m, m \in \mathbb{Z}$.

3. В автореферате, теорема 3.6, и в диссертации стр. 71 функция $\alpha(\Omega,X)$ определяется по-разному.

4. В определении 1.21 семейства эволюционных операторов допущена опечатка. Надо $\tau \le s \le t$.

5. В определении возмущающего потенциала на странице 42 $P,Q \in L_\infty([0,2\pi],\mathbb{C}^2)$, что естественно. Но на следующей странице $P,Q \in F$. Что же есть на самом деле?

Сделанные замечания не снижают общего высокой научного уровня рассматриваемой диссертации. Все утверждения диссертации сопровождаются полными и подробными доказательствами. Необходимые сведения, используемые в диссертации, сопровождаются ссылками на соответствующие источники. Таким образом, все утверждения диссертации являются полностью обоснованными и достоверными.

Все утверждения диссертации, выносимые на защиту, являются новыми. Диссертация содержит обширный список цитированной литературы, тщательно и хорошо оформлена и выполнена на весьма высоком научном уровне, превосходящем требования, предъявляемые к кандидатским диссертациям.

Ее результаты будут оценены математиками, проводящими свои исследования в области спектральной теории линейных операторов в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Институте математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Воронежском государственном университете, Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского, Саратовском государственном техническом университете имени Гагарина Ю.А., Белгородском государственном национальном исследовательском университете и других научных учреждениях.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в четырнадцати работах, причем четыре статьи опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК.

Результаты диссертации неоднократно докладывались на различных конференциях, в том числе, имеющих международный статус.

Автореферат диссертации достаточно полно и правильно отражает ее содержание. Диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа Романовой Елены Юрьевны "Метод подобных операторов в исследовании оператора Дирака и дифференциального оператора с инволюцией" является законченной научно-квалификационной работой, содержащей решение задач, имеющих существенное значение для функционального анализа. Работа Е.Ю. Романовой удовлетворяет всем требованиям п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", утвержденного Постановлением Правительства РФ, которые предъявляются к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук. Автор,

Романова Елена Юрьевна, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета

А.А. Седаев.

Адрес: **394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84**

Тел./факс: +7(473) 271-59-05, e-mail: chancellery@vgasu.vrn.ru

27.10.2015.

Подпись Седаева заверяю
Начальник общего отдела Л.В. Савина
27 10 2015 г.